練習問題 2-A

1.

（1）$(x^2-4x)+(y^2+2y)-7=0$

$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-7=0$

$(x-2)^2+(y+1)^2=12$

$(x-2)^2+(y+1)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$

よって，**中心** $\boldsymbol{(2,\ -1)}$，**半径** $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

（2）$x^2+(y^2-3y)+1=0$

$x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+1=0$

$x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

$x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

よって，**中心** $\boldsymbol{\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)}$，**半径** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

2.

（1）求める円の方程式を

$(x-1)^2+(y+2)^2=r^2$

とおくと，この円が点$(4,\ 1)$を通るので

$(4-1)^2+(1+2)^2=r^2$

よって，$r^2=18$

したがって，

$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2=18}$

（2）円の中心の座標は，与えられた2点の中点だから

$\left(\dfrac{2+6}{2},\ \dfrac{4+(-2)}{2}\right)=(4,\ 1)$

半径は，この中心と点$(2,\ 4)$との距離だから

$\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2}=\sqrt{13}$

よって，求める円の方程式は，

$(x-4)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2$

$\boldsymbol{(x-4)^2+(y-1)^2=13}$

（3）求める円の方程式を，

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

とおくと，この円が，与えられた3点を通るから

$$\begin{cases}1+1+a+b+c=0\\4+16+2a+4b+c=0\\25+9+5a+3b+c=0\end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases}a+b+c=-2\\2a+4b+c=-20\\5a+3b+c=-34\end{cases}$$

これを解いて，$(a,\ b,\ c)=(-6,\ -4,\ 8)$

よって，求める方程式は，

$\boldsymbol{x^2+y^2-6x-4y+8=0}$

3.

点Pの座標を$(x,\ y)$とすると

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=(x-2)^2+y^2\\\mathrm{BP}^2&=x^2+(y-2)^2\end{aligned}\right\}\cdots ①$$

（1）与式に①を代入すると

$(x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=6$

$x^2-4x+4+y^2+x^2+y^2-4y+4=6$

$2x^2-4x+2y^2-4y=6$

$x^2-2x+y^2-2y=3$

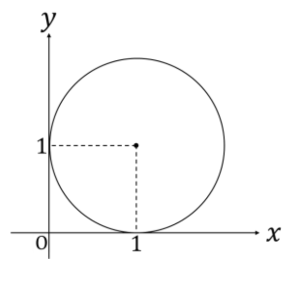
$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1=3$

$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2=1}$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1^2$

よって，求める軌跡は，

中心 $(1,\ 1)$，半径 1 の円である．



（2）$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$より，$2\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$であるから

$4\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

これに①を代入すると

$4\{(x-2)^2+y^2\}=x^2+(y-2)^2$

$4(x^2-4x+4+y^2)=x^2+y^2-4y+4$

$4x^2-16x+16+4y^2=x^2+y^2-4y+4$

$3x^2-16x+3y^2+4y+12=0$

$x^2-\dfrac{16x}{3}+y^2+\dfrac{4y}{3}+4=0$

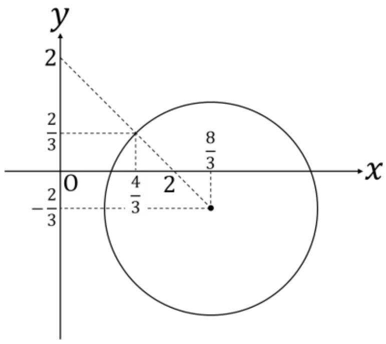
$$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2-\frac{64}{9}+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+4=0$$

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{32}{9}}$$

$$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

よって，求める軌跡は，

中心 $\left(\frac{8}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$，半径$\frac{4\sqrt{2}}{3}$の円である．



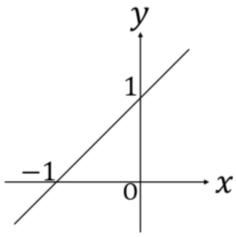
（３）与式に①を代入すると，

$(x-2)^2+y^2-\{x^2+(y-2)^2\}=4$

$x^2-4x+4+y^2-(x^2+y^2-4y+4)=4$

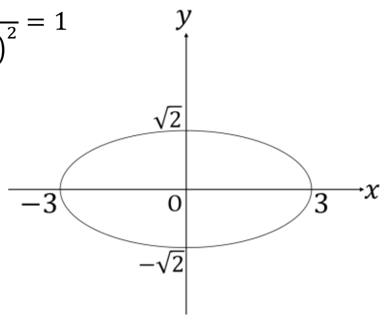
$-4x+4y=4$

$y=x+1$



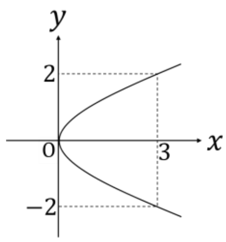
4.

（１）$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$

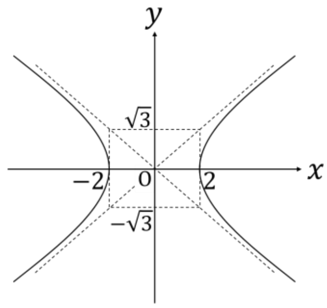


（２）$y^2=\frac{4}{3}x$

$y^2=4\cdot\frac{1}{3}x$



（３）$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$



5.

（１）焦点が$\left(0,\ \pm\sqrt{3}\right)$であるから，

求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(b>a>0)$$

とおくことができる．長軸の長さが6であるから

$2b=6$

よって，$b=3$

$\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{3}$

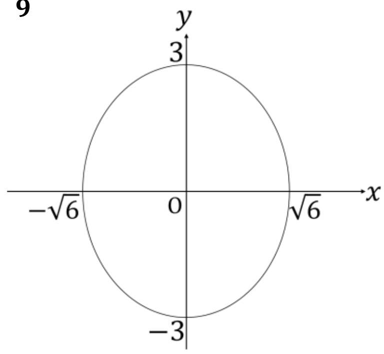
であるから，これに$b=3$を代入して

$9-a^2=3$

よって，$a^2=6$

したがって，楕円の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1}$$



（２）焦点はy軸上にあるので，求める双曲線の

方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\quad(a>0,\ b>0)$$

とおくことができる．

点$(0,\ 1)$を通るから

$$-\frac{1}{b^2}=-1$$

よって，$b^2=1$・・・①

漸近線の傾きが$\pm\frac{1}{2}x$であるから

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$$

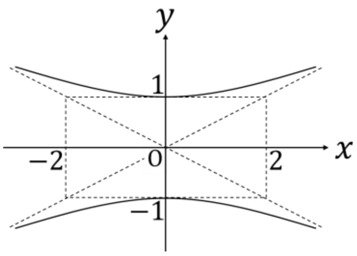
よって，$a=2b$となるので

$$a^2=4b^2$$

①を代入して，$a^2=4\cdot 1=4$

したがって，双曲線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{4}-y^2=-1}$$



6.

$y=x+k$を，$5x^2-y^2=-5$に代入して整理すると

$$5x^2-(x+k)^2=-5$$

$$5x^2-(x^2+2kx+k^2)=-5$$

$$4x^2-2kx-k^2+5=0\ \cdot\cdot\cdot ①$$

この２次方程式の判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-4(-k^2+5)$$

$$=k^2+4k^2-20$$

$$=5k^2-20$$

双曲線と直線が接するための条件は，

$D=0$であるから

$$5k^2-20=0$$

$$k^2=4$$

$$k=\pm 2$$

このとき，①は

$$4x^2\mp 4x+1=0$$

となるから，これを解いて

$$(2x\mp 1)^2=0$$

$$x=\pm\frac{1}{2}$$

$$y=x+k$$

$$=\pm\frac{1}{2}\pm 2\quad (\text{複号同順})$$

$$=\pm\frac{5}{2}$$

よって，$\boldsymbol{k=\pm 2}$

焦点の座標は

$$\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{5}{2}\right)\quad (\text{複号同順})$$

7.

（１）$x^2+y^2>4$の表す領域は，円$x^2+y^2=4$の外部である．

$x+y+2>0$より，$y>-x-2$

この不等式の表す領域は，直線$y=-x-2$の上側である．

円と直線の交点の座標を求めると

$$x^2+(-x-2)^2=4$$

$$x^2+x^2+4x+4=4$$

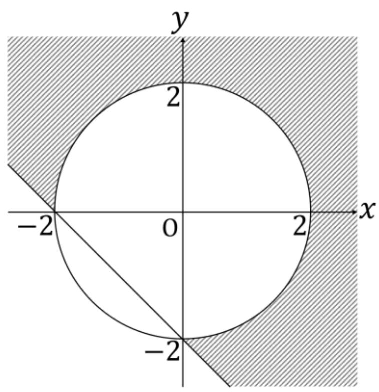
$$2x^2+4x=0$$

$$x(x+2)=0$$

$$x=0,\ -2$$

よって，$(0,\ -2)$，$(-2,\ 0)$

したがって，求める領域は，２つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である．



ただし，**境界を含まない．**

（２）$x^2+y\leqq 0$より，$y\leqq -x^2$

この不等式の表す領域は，放物線$y=x^2$の下側である．

$2x-y-3\leqq 0$より，$y\geqq 2x-3$

この不等式の表す領域は，直線$y=2x-3$の上側である．

放物線と直線の交点を求めると

$$-x^2=2x-3$$

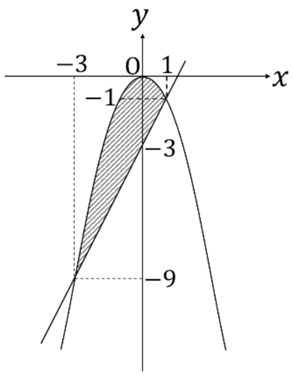
$$x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

$$x=-3,\ 1$$

よって，$(-3,\ -9)$，$(1,\ -1)$

したがって，求める領域は，２つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である．



ただし，**境界を含む.**

8.

2 直線$y = x + 1$，$y = 3x - 1$の交点の座標は，

$(1,\ 2)$，

2 直線$y = -x + 1$，$y = 3x - 1$の交点の座標は，

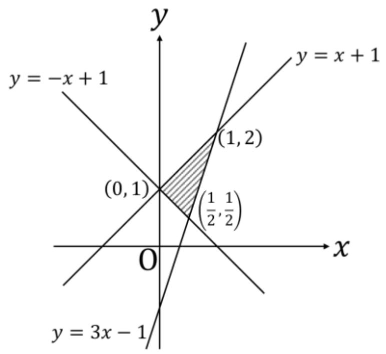
$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，

2 直線$y = x + 1$，$y = -x + 1$の交点の座標は，

$(0,\ 1)$である．

よって，与えられてた連立不等式の表す領域は

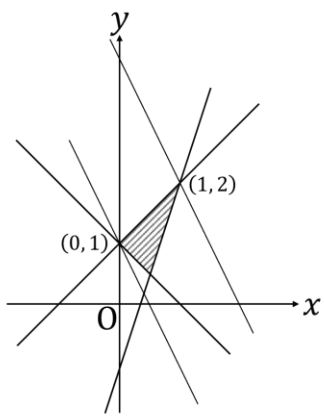
図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



$2x + y = k$とおくと

$y = -2x + k$・・・①

①は，傾きが-2，切片がkの直線を示す．



図より，直線①が点$(1,\ 2)$を通るとき，kの値は

最大となる．

このとき，$k = 2x + y = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

また，直線①が点$(0,\ 1)$を通るとき，kの値は

最小となる．

このとき，$k = 2x + y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

よって

最大値　4　（$\boldsymbol{x = 1,\ y = 2}$のとき）

最小値　1　（$\boldsymbol{x = 0,\ y = 1}$のとき）

練習問題 2-B

（１）中心の座標は，$(0,\ t)$と表されるので，

求める円の方程式を

$x^2 + (y - t)^2 = r^2$

とおくと，この円が与えられた２点を通るから

$$\begin{cases} 1 + (1 - t)^2 = r^2 \\ 4 + (4 - t)^2 = r^2 \end{cases}$$

r^2を削除すると

$$1 + (1 - t)^2 = 4 + (4 - t)^2$$

$$1 + 1 - 2t + t^2 = 4 + 16 - 8t + t^2$$

$$6t = 18$$

$$t = 3$$

よって，$r^2 = 1 + (1 - 3)^2 = 5$

したがって

$$\boldsymbol{x^2 + (y - 3)^2 = 5}$$

（２）中心の座標は，$(t,\ t)$と表されるので，

求める円の方程式を

$(x - t)^2 + (y - t)^2 = r^2$

とおくと，この円が与えられた２点を通るから

$$\begin{cases} t^2 + t^2 = r^2 \\ (1 - t)^2 + (3 - t)^2 = r^2 \end{cases}$$

r^2を削除すると

$$2t^2 = (1 - t)^2 + (3 - t)^2$$

$$2t^2 = 1 - 2t + t^2 + 9 - 6t + t^2$$

$$8t = 10$$

$$t = \frac{5}{4}$$

よって，$r^2 = 2t^2 = 2 \cdot \frac{25}{16} = \frac{25}{8}$

したがって

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}}$$

2.

$y=mx$を$x^2+y^2-3x-2y+3=0$に代入して整理すると

$$x^2+(mx)^2-3x-2(mx)+3=0$$

$$(m^2+1)x^2-(2m+3)x+3=0$$

この２次方程式の判別式をDとすると

$$\begin{aligned}D&=\{-(2m+3)\}^2-4\cdot(m^2+1)\cdot 3\\&=4m^2+12m+9-12m^2-12\\&=-8m^2+12m-3\end{aligned}$$

直線と円が接するのは，$D=0$のときであるから

$$8m^2-12m+3=0$$

$$\begin{aligned}m&=\frac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 8\cdot 3}}{2\cdot 8}\\&=\frac{12\pm\sqrt{144-96}}{16}\\&=\frac{12\pm\sqrt{48}}{16}\\&=\frac{12\pm 4\sqrt{3}}{16}\\&=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}}\end{aligned}$$

また，直線と円が共有点を持たないのは，$D<0$のときであるから

$$-8m^2+12m-3<0$$

$$8m^2-12m+3>0$$

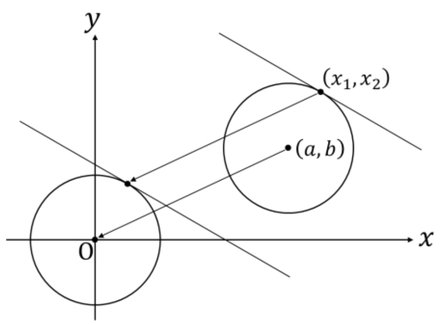
$$8\left(m-\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)\left(m-\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)>0$$

よって

$$\boldsymbol{m<\frac{3-\sqrt{3}}{4},\ m>\frac{3+\sqrt{3}}{4}}$$

3.

円$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$と円周上の点$(x_1,\ y_1)$を，x軸方向に$-a$，y軸方向に$-b$だけ平行移動させると，円は$x^2+y^2=r^2$に，円周上の点は$(x_1-a,\ y_1-b)$に移る．



円$x^2+y^2=r^2$の，点$(x_1-a,\ y_1-b)$における接線の方程式は

$$(x_1-a)x+(y_1-b)y=r^2$$

である．

求める戦線の方程式は，この直線を，x軸方向にa，y軸方向にbだけ平行移動させればよいから

$$\boldsymbol{(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2}$$

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 3)$，$a=-2$，$b=1$，$r^2=13$であるから，求める接線の方程式は

$$(1+2)(x+2)+(3-1)(y-1)=13$$

$$3(x+2)+2(y-1)=13$$

$$3x+6+2y-2=13$$

$$\boldsymbol{3x+2y=9}$$

4.

$y=mx+1$を$x^2+4y^2=2$に代入して整理すると

$$x^2+4(mx+1)^2=2$$

$$x^2+4(m^2x^2+2mx+1)=2$$

$$(4m^2+1)x^2+8mx+2=0$$

この２次方程式の判別式をDとすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(4m)^2-(4m^2+1)\cdot 2\\&=16m^2-8m^2-2\\&=8m^2-2=0\end{aligned}$$

i）$D>0$のとき，すなわち

$$8m^2-2>0$$

$$4m^2-1>0$$

$$(2m+1)(2m-1)>0$$

$m<-\frac{1}{2}$，$m>\frac{1}{2}$のとき，

共有点の個数は２個.

ii）$D=0$のとき，すなわち

$m=\pm\frac{1}{2}$のとき

共有点の個数は１個.

iii）$D<0$のとき，すなわち

$-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$のとき

共有点の個数は０個.

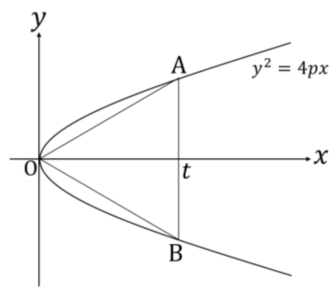
よって

$\boldsymbol{m < -\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{m > \frac{1}{2}}$**のとき　2個**

$\boldsymbol{m = \pm\frac{1}{2}}$**のとき　1個**

$\boldsymbol{-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}}$**のとき　0個**

5.



点 A, B のx座標をtとすると

$y^2 = 4pt$より，$y = \pm 2\sqrt{pt}$

ここで, $\mathrm{A}(t,\ 2\sqrt{pt})$, $\mathrm{B}(t,\ -2\sqrt{pt})$とする.

$$\mathrm{OA} = \sqrt{t^2 + (2\sqrt{pt})^2}$$
$$= \sqrt{t^2 + 4pt}$$
$$\mathrm{AB} = 2\sqrt{pt} - (-2\sqrt{pt})$$
$$= 4\sqrt{pt}$$

$\mathrm{OA} = \mathrm{AB}$より，$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{AB}^2$であるから

$$t^2 + 4pt = 16pt$$
$$t^2 - 12pt = 0$$
$$t(t - 12p) = 0$$

$t = 0$であるから，$t = 12p$

よって

$$\mathrm{AB} = 4\sqrt{p \cdot 12p} = 8\sqrt{3}p$$

したがって

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot t$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3}p \cdot 12p$$
$$\boldsymbol{= 48\sqrt{3}p^2}$$

6.

（１）$\triangle\mathrm{OAB}$で，$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 = \mathrm{AB}^2$であるから

$$a^2 + b^2 = 3^2$$

すなわち，$\boldsymbol{a^2 + b^2 = 9}$

（２）$x = \dfrac{2 \cdot a + 1 \cdot 0}{1 + 2} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}a}$

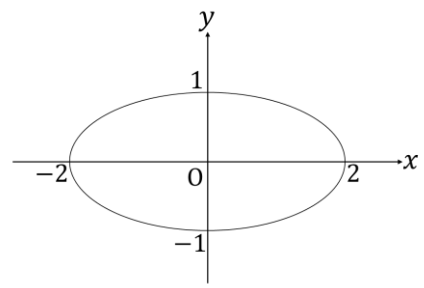
$$y = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot b}{1 + 2} = \boldsymbol{\frac{1}{3}b}$$

（３）$x = \dfrac{2}{3}a$より，$a = \dfrac{3}{2}x$

$y = \dfrac{1}{3}b$より，$b = 3y$

これらを，$a^2 + b^2 = 9$に代入すると

$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (3y)^2 = 9$$
$$\frac{9}{4}x^2 + 9y^2 = 9$$
$$\boldsymbol{\frac{x^2}{4} + y^2 = 1}$$



7.

$y^2 \leqq 4x$より，$x \geqq \dfrac{1}{4}y^2$

この不等式の表す領域は，$x^2 = \dfrac{1}{4}y^2$の右側である.

$2x + y \leqq 12$より，$y \leqq -2x + 12$

この不等式の表す領域は，直線$y = -2x + 12$の下側である.

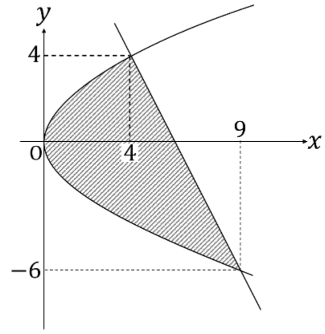
放物線と直線の交点の座標を求めると

$$\frac{1}{4}y^2 = -\frac{1}{2}y + 6$$
$$y^2 + 2y - 24 = 0$$
$$(y + 6)(y - 4) = 0$$
$$y = -6,\ 4$$

よって，$(9,\ -6)$，$(4,\ 4)$

したがって，求める領域は，２つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である.

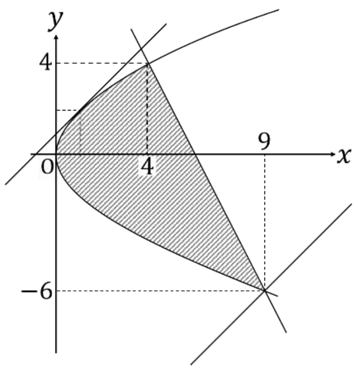
ただし，境界を含む.



$x - y = k$とおくと

$y = x - k$・・・①

①は，傾きが1，切片が$-k$の直線を表す.



図より，直線①が点$(9,\ -6)$を通るとき，

$-k$が最小になるので，kの値は最大となる.

このとき，$k = x - y = 9 - (-6) = 15$

また，直線①と$y^2 = 4x$との接点において，

$-k$が最大になるので，kの値は最小となる.

kの値を判別式によって求める.

$y = x - k$を$y^2 = 4x$に代入して整理すると，

$$(x-k)^2 = 4x$$

$$x^2 - 2kx + k^2 - 4x = 0$$

$$x^2 + 2(-x-2)x + k^2 = 0$$

この方程式の判別式をDとすると，

$$\frac{D}{4} = (-k-2)^2 - k^2$$

$$= k^2 + 4k + 4 - k^2$$

$$= 4k + 4$$

接点を持つ(共有点が１個となる)のは，$D = 0$

のときであるから，

$$k + 1 = 0$$

$$k = -1$$

したがって，この値がkの最小値となる.

また，接点の座標は，$y = x + 1$と$y^2 = 4x$の交点で

あるから，求めると$(1,\ 2)$である.

よって

最大値　15　（$x = 9,\ y = -6$のとき）

最小値　−1　（$x = 1,\ y = 2$のとき）

8.

点P座標を$(x,\ y)$とすると

$$\mathrm{PF} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\mathrm{PF}' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2a$に代入すると

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

両辺を２乗して整理すると

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

両辺を２乗して整理すると

$$a^2\{(x+c)^2 + y^2\} = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

問題文より，$a^2 - c^2 = b^2$であるから

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

両辺をa^2b^2で割って

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$